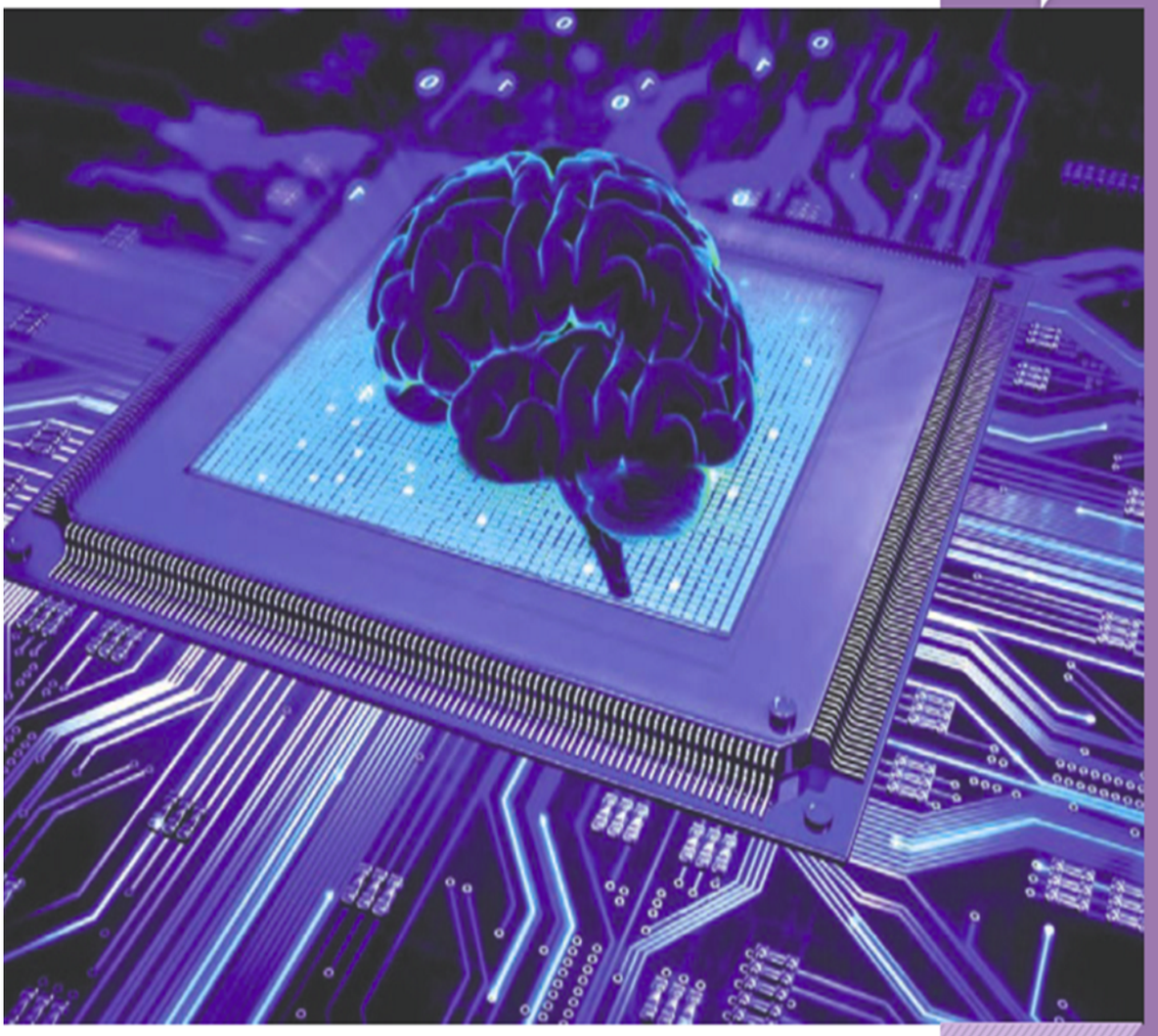
فصل اوّل

۱

ماتریس و کاربــردها



یکی از کاربردی‌ترین مباحث و موضوع‌های ریاضی مبحث ماتریس است. امروزه از ماتریس به عنوان ابزاری قوی در شاخه‌های دیگر ریاضیات و به‌خصوص در فیزیک کوانتم (هایزنبرگ، اولین شخصی که ماتریس‌ها را در فیزیک به کار برد، می‌گوید: تنها ابزاری که من در مکانیک کوانتم نیاز دارم ماتریس‌ها می‌باشند.) و در رایانه و علومی چون آمار، حسابداری و... استفاده می‌شود. ریاضیات کاربردی، در تمام گرایش‌هایش نیاز مبرم به ماتریس دارد زیرا در بیشتر موارد، حل مسائل کاربردی و عملی با حل دستگاه‌های معادلات و نامعادلات پیوند می‌خورد و حل این دستگاه‌ها با ماتریس رابطهٔ تنگاتنگ دارد.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید .

نتیجه

۱ – در حالت کلّی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد

۲ – دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی

۳ – دترمینان ماتریس مربعی صفر، ۰ است.

۴ – در ماتریس $A=[a_{ij}]_{4\times 3}$ که در آن $a_{ij}=\frac{2i}{j-1}$ باشد، درایه واقع در سطر سوم وستون دوم ماتریس A برابر است با : ۶

$\frac{6}{2-1}$ $i=3, j=2$

۵ – اگر $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ -1 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|-A|$ برابر است با -8

$(-1)^3|A|=-8$ 8

۶ – ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس اسکالر می‌نامیم .

۷ – شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد آن است که دترمینان ماتریس A ۱ باشد . $|A|\neq 0$

۸ - از تساوی ماتریسی $A\times B=A\times C$ که در آن A یک ماتریس مربعی است، با شرط ..... نتیجه می‌شود B=C.

$|A|\neq 0$

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۱ – اگر $|A|\neq 0$ آنگاه دستگاه دارای یک جواب منحصربه‌فرد است (دو خط متقاطع اند). درست

۲ – اگر برای ماتریس‌های متمایز A، B و C داشته باشیم، $AB=AC$ ، آنگاه لزوماً $B=C$ است. نادرست

۳ - هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است. درست

۴ ـ اگر $A^2=A$ باشد در این‌صورت داریم : $(A+I)^2=I+3A$

$(A+I)^2=\cancel{A^2}+2A+I=3A+I$ ($A^2=A$)

۵ ـ وارون هر ماتریس مربعی ،در صورت وجود منحصربه فرد نیست. درست

۶ . دستگاه معادلات $\begin{cases}-4x+6y=2\\2x-3y=1\end{cases}$ جواب ندارد. نادرست

$\frac{-4}{2}=\frac{6}{-3}\neq\frac{2}{1}$

۷ – اگر A ماتریس اسکالر و B ماتریس هم‌مرتبه A باشد، آنگاه حاصلضرب آنها تعویض‌پذیر است. (درست-نادرست) درست

۸ – اگر $A=\begin{bmatrix}5&-2\\10&-4\end{bmatrix}$ باشد آنگاه $A^{1403}=I$. (درست-نادرست) نادرست

$A^2=\begin{bmatrix}5&-2\\10&-4\end{bmatrix}$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

در هر قسمت گزینه صحیح را از میان گزینه‌های داده شده انتخاب کنید و در پاسخ‌برگ بنویسید.

الف) ماتریس A یک ماتریس ۳ × ۳ است که $|A| = ۲$. در این صورت $\left|\frac{۱}{۲}A\right|$ کدام گزینه است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۸}$

$\frac{1}{8}|A| =$

ب) در تساوی ماتریسی $[x \quad ۱ \quad ۲x]\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۱ \\ ۲x \end{bmatrix} = ۶$، مقدار $|x|$ کدام است؟

$|kA| = k^n|A|$

۱) $\frac{۷}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) ۱ ۴) ۲

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$\boxed{|AB| = |A||B|}$

$|A^n| = |A|^n$

ت) مقدار عددی $a_{۲۳}$ در ماتریس $A = [i - j]_{۳\times۳}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۱- ۴) ۲

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

حاصل هر یک از عبارت‌های ستون A را از ستون B انتخاب کنید و در پاسخ‌برگ بنویسید (یکی از اعداد ستون B اضافه است).

عبارت

پویش علمی ماندگار البرز

A	B
الف) مقدار عددی $\lvert ۲A\rvert$ در صورتی که $\lvert A_{۲\times۲}\rvert = ۱$	۲
ب) مقدار عددی درایهٔ $b_{۱۳}$ در ماتریس $B=[۲j+i]_{۳\times۳}$	۴
پ) مقدار عددی $\begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{vmatrix}$	۵
	۷

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

تمرین

۱ــ اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ ماتریسی ۴×۳ باشد به‌طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^2$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۲ــ اگر $A=\begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

۳ــ دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\bar{O}$ و $B\neq\bar{O}$ ولی $AB=\bar{O}$.

۴ــ با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلّی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

۵ــ اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به‌صورت $A^2=AA$ و $A^3=AA^2$ و ... و $A^n=AA^{n-1}$ $(n\in \mathbb{N}\ \ n>1)$ تعریف کنیم، در این صورت با فرض $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل A^2 و A^3 و A^7 را بیابید.

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

۷ــ اگر $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ و $B=[b_{ij}]_{2\times 3}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را به‌دست آورید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i^2-1 & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases} \quad \text{و} \quad b_{ij}=\begin{cases} i^2+1 & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+2 & i<j \end{cases}$$

۸ــ اگر $A=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A\times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۹ــ اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و B ماتریسی هم‌مرتبهٔ A در این صورت

الف) برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید.

ب) آیا تساوی $A\times B=B\times A$ برقرار است؟

۱۰ــ اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$ ثابت کنید.

الف) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

ب) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

۱۱ــ اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض باشد. حاصل A^2 را به‌دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پویش علمی ماندگار البرز

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i-۲j & i<j \\ j-i & i\geq j \end{cases}$ می‌باشد. مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A را به دست آورید.

$i=۱ \quad j=۲$

$i=۲ \quad j=۲$

$i=۳ \quad j=۲$

$$\begin{bmatrix} -۳ & & \\ ۰ & & \\ -۱ & & \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد مقادیر α و β را طوری بیابید که داشته باشیم : $A^۲ = \alpha A + \beta I$ (I ماتریس واحد است)

$A^۲ = (1+1)A - 1I$

$\begin{cases} \alpha = ۲ \\ \beta = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} A^۲ = \\ \alpha A + \beta I \end{cases}$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

اگرماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و ماتریس $B=[b_{ij}]_{۳\times ۳}$ به صورت $b_{ij}=\begin{cases} i^{۲}+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$ معرفی شده اند.

الف-ماتریس B را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

ب-حاصل ضرب $A\times B$ را بیابید، وسپس دترمینان ماتریس $A\times B$ رابه دست آورید.

$$B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۱۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ b & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a & -۶ \\ -۲ & a \end{bmatrix}$. ماتریس $A\times B$ را محاسبه کنید و مقدار a را طوری به‌دست آورید که ماتریس حاصل اسکالر باشد.

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ b & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -۶ \\ -۲ & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲a-۶ & -۱۲+۳a \\ ab-۴ & -۶b+۲a \end{bmatrix}$$

$$-۱۲+۳a=۰ \Longrightarrow a=۴$$

$$ab-۴=۰ \xrightarrow{a=۴} b=۱$$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

در حالت کلی اگر فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ در این صورت برای $r\in\mathbb{R}$ داریم:

$r(A\pm B)=r([a_{ij}]\pm[b_{ij}])=r[a_{ij}\pm b_{ij}]=[r(a_{ij}\pm b_{ij})]$

$=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]$ توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع در $\mathbb{R}$

$=[ra_{ij}]\pm[rb_{ij}]$ تعریف جمع (تفاضل)

$=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}]$ تعریف ضرب عدد در ماتریس

$=rA\pm rB$

۱۰ـ اگر A و B ماتریس‌های 3×3 و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$ ثابت کنید.

الف) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

ب) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

قضیه یکتایی وارون: وارون هر ماتریسی مربعی (در این کتاب فقط وارون ماتریس‌های 2×2 محاسبه شده است) در صورت وجود منحصربه‌فرد است.

اثبات: فرض کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند ثابت می‌کنیم $B=C$

طبق فرض: $AB=BA=I$

طبق فرض: $AC=CA=I$

$B=IB=(CA)B=C(AB)$

$=CI=C$

AI

با استفاده از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و ماتریس همانی I درستی رابطه زیر را ثابت کنید:

$(A-3I)^2=A^2-6A+9I$

اگر A ماتریس اسکالر B ماتریس هم مرتبه A باشد حل کنید

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

$(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2 \xrightarrow{AB=BA} A^2-2AB+B^2$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

دبیرستان ماندگار البرز

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

کار در کلاس

۱ــ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $A\times B$ را به‌دست آورده و برقراری تساوی $|AB|=|A||B|$ را بررسی کنید.

۲ــ ماتریسی ۳×۳ چون A بنویسید طوری که $|A| = -۶$، سپس ماتریس $A^۲$ را محاسبه و $|A^۲|$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تمرین

۱ــ اگر $A=[۱ \;\; ۲ \;\; -۳]$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به‌دست آورید.

۲ــ اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^۲|$ را به‌دست آورید.

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\left(|A|^۳ - ۲\right)$ را بیابید.

۴ــ دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را برحسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵ــ ماتریسی ۳ × ۳ چون A بیابید که $|A| = ۳$.

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(۲A^{-۱} - ۳B^{-۱})$ را بیابید.

۷ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به‌دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-۱}|$ مقایسه کنید.

۸ــ الف) ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ بررسی کنید.

۹ــ برای ماتریس ۲×۲ مانند A دو مقدار $|A|$ و $|KA|$ $(k \in \mathbb{R})$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۰ــ اگر A ماتریسی ۳ × ۳ باشد و $|A| = ۵$ در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

۱۱ــ دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

۱۲ــ به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx + ۳y = ۴ \\ x - ۲y = ۳ \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.

۱۳ــ روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

الف) $\begin{cases} ۳x - ۵y = -۱ \\ ۲x + y = ۸ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x + ۳y = ۵ \\ -۲x - ۶y = ۱ \end{cases}$

پ) $\begin{cases} -۲x + ۳y = ۲ \\ ۴x - ۶y = -۴ \end{cases}$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A|=۲$ حاصل $\left|\frac{۱}{|A|}A\right|$ را بیابید.

$$\left|\frac{1}{|A|}A\right| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^{3}|A|$$

$$\frac{1}{8}\cancel{|A|} = \frac{1}{4}$$

$$=\left(\frac{1}{8}\right)(2) = \frac{1}{4}$$

اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ و $|A^{۳}|=-۸$ باشد، حاصل $\frac{|A^{-۱}|}{|۳A|}$ را بیابید

$$|A|^{3}=-8 \longrightarrow |A|=-2$$

$$\frac{|A^{-1}|}{|3A|} = \frac{\frac{1}{|A|}}{3^{2}|A|} = \frac{\frac{1}{-2}}{9(-2)} = \frac{1}{36}$$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد حاصل ماتریس $۲A$ را بیابید.

نتیجه

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این صورت وارون ماتریس A یعنی $A^{-۱}$ از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^{-1}=A$$

$$(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2A=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$|A|\neq 0 \xrightarrow{|A|=24}$$

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

اگر $A=\begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 4 & |A| \end{bmatrix}$ باشد مقدار دترمینان ماتریس A را بیابید.

$$|A| = 5|A|^2 - 4|A| \Rightarrow 5|A|^2 - 5|A| = 0$$

$$\begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = 1 \end{cases}$$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز

اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، نشان دهید: $(۵A)^{-۱} = \frac{۱}{۵} A^{-۱}$

$$(۵A)^{-1} = \begin{bmatrix} ۵ & -۵ \\ ۵ & -۵ \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-۵۰} \begin{bmatrix} -۵ & ۵ \\ -۵ & ۱۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{۱۰} & -\frac{1}{۱۰} \\ \frac{1}{۱۰} & -\frac{۳}{۱۰} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{۵} A^{-1} = \frac{1}{۵} \left(\frac{1}{-۲} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & ۳ \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{۱۰} & -\frac{1}{۱۰} \\ \frac{1}{۱۰} & -\frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$$

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + ۳y = -۳ \\ ۴x + (m+۴)y = ۲ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ در این صورت دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب یکتا دارد که مانند مثال قبل به دست می‌آید.

ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ در این صورت دو خط موازی‌اند و یکی از دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد :

۱ـ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط موازی‌اند و هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند لذا دستگاه هیچ جوابی ندارد.

۲ـ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط موازی‌اند و روی یکدیگر واقع‌اند یا به عبارتی هر دو معامله یک خط را نشان می‌دهند؛ لذا دستگاه تعداد بی‌شمار جواب دارد و هر نقطه‌ای که در یکی از معادلات صدق کند، در دیگری هم صدق می‌کند.

نتیجه

اگر ماتریس ضرایب دستگاه را $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم در این صورت با توجه به (الف) و (ب) می‌توان گفت:

I) اگر $|A| \neq ۰$ آنگاه دستگاه دارای یک جواب منحصربه‌فرد است (دو خط متقاطع‌اند).

II) اگر $|A| = ۰$ در این صورت یا دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی‌اند) و یا اینکه دستگاه بی‌شمار جواب دارد (دو خط برهم منطبق هستند).

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید.

$$\begin{cases} ۳x - ۵y = -۱ \\ ۲x + y = ۸ \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix}}_{B}$$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

پویش علمی ماندگار البرز

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۶ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$، حاصل $\left|-\frac{۱}{۲}A^{۴}\right|$ را به‌دست آورید.

$$|A| = ۱(۱۴) - ۲(۲) + ۱(-۸)$$

$$|A| = ۱۴ - ۴ - ۸ = ۲$$

$$\left|-\frac{۱}{۲}A^{۴}\right| = \left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۳}|A|^{۴} = -\frac{۱}{۸}(۱۶) = -۲$$

دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

دترمینان ماتریس مقابل را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{matrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{matrix} \quad \begin{matrix} ۴ \\ ۳ \\ ۱ \end{matrix}$$

$$|A| = (۴ - ۹ - ۸) - (-۸ - ۱۲ + ۳)$$

$$= (-۱۳) - (-۱۷) = ۴$$

پویش علمی ماندگار البرز
دبیرستان ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ -۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ را برحسب ستون اول به دست آورید.

پویش علمی ماندگار البرز
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز